

APPLICATION DU THEOREME DES TRAVAUX VIRTUELS AU CALCUL DES STRUCTURES ISOSTATIQUES

Philippe Lawrence

Octobre 2012

Exercice 1

On considère la structure {S} de la figure 1. Dans le cadre de cet exercice, la structure est résolue d'abord par le PFS et ensuite à l'aide du TTV*. L'objectif n'est pas de comparer la rapidité des deux méthodes mais de se familiariser avec la méthode du TTV* afin de maîtriser la démarche en vue de la résolution des structures hyperstatiques.

Calculer la réaction d'appui en B

- a) par la méthode classique de la statique
 - b) par le théorème des travaux virtuels
- On vérifie aisément que {S} est isostatique.

a) Application du PFS (fig. 2)

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\sum M(A) = 0$$

Projection sur x : $A_x = 0$

Projection sur y : $A_y + B_y - F = 0$

Moment suivant l'axe z au point A : $M_A = 0 = B_y L - F \frac{L}{3}$

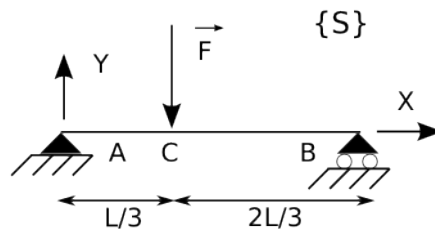


FIG. 1 – Structure isostatique

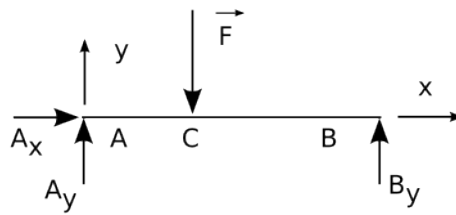


FIG. 2 – Application du PFS

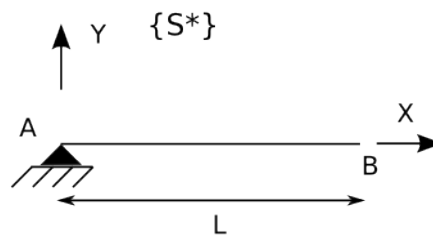


FIG. 3 – Structure virtuelle correspondante

$$A_y = \frac{2F}{3}$$

$$B_y = \frac{F}{3}$$

b) Application du théorème des travaux virtuels

Choix d'un mécanisme associé :

A partir de {S}, nous supprimons un degré de liaison de façon à faire apparaître dans le calcul des travaux virtuels le travail de la réaction d'appui que l'on cherche à calculer. Pour cela, le point B doit être animé d'un déplacement non nul dans la direction de la réaction B_y . Le mécanisme associé est donc obtenu à partir de {S} en supprimant l'appui simple au point B (fig. 3).

Afin de rétablir l'équilibre, l'appui simple en B est remplacé par une réaction de liaison B_y . Le système {S*} obtenu à partir du mécanisme, du chargement de {S} et de la réaction d'appui B_y est donc équivalent à {S} (fig. 4).

Calcul du travail virtuel des efforts extérieurs :

Le déplacement (fig. 5) du point d'application de F est $\frac{v^*}{3}$ suivant y. Le travail de F est donc :

$$T_e^* = -F \frac{v^*}{3}$$

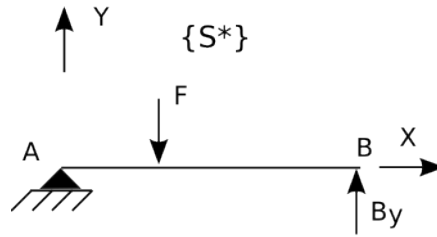


FIG. 4 – Structure équivalente

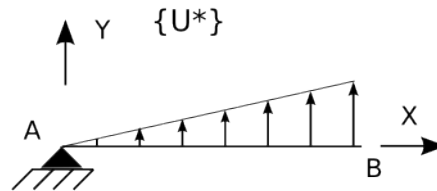


FIG. 5 – Déplacement virtuel

Calcul du travail des efforts de liaison :

$$T_i^* = B_y v^*$$

Le théorème des travaux virtuels permet d'écrire :

$$\sum T^* = T_e^* + T_i^* \Rightarrow -\frac{v^*}{3} + T_i^* = B_y v^* = 0$$

$$B_y = \frac{F}{3}$$

Remarque :

Dans l'expression finale, le déplacement virtuel v^* disparaît.

Calculer le moment fléchissant en C par les deux méthodes (statique, TTV*)

a) Application du principe fondamental de la statique

L'effort tranchant en C présente une discontinuité (application d'une charge concentrée). On note : $V(C,g)$ l'effort tranchant à gauche de C, $V(C,d)$ l'effort tranchant à droite de C (fig. 6). En écrivant la somme des moments en C à partir d'un des deux

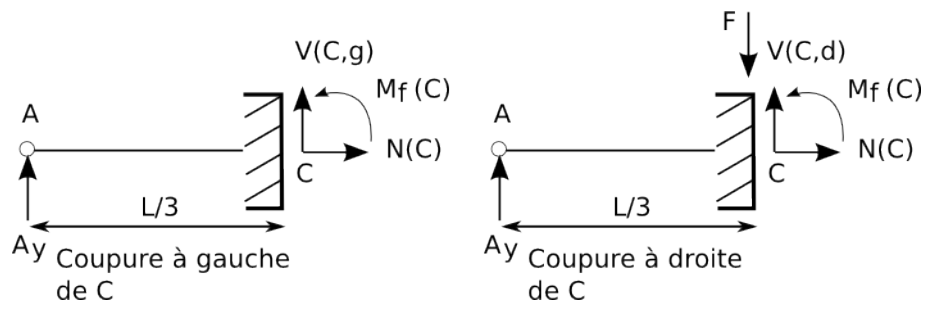


FIG. 6 – Méthode des coupures : équilibre de gauche

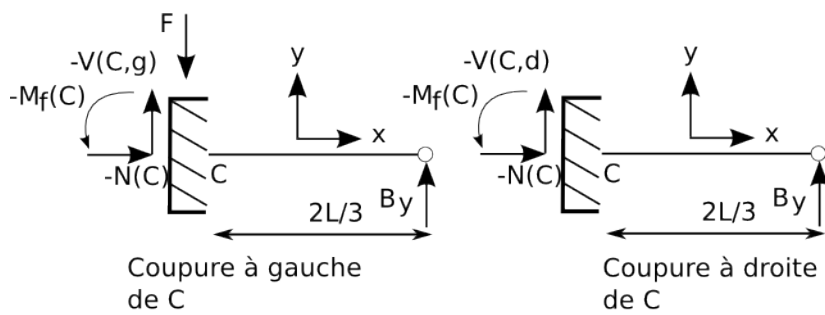


FIG. 7 – Méthode des coupures : équilibre de droite

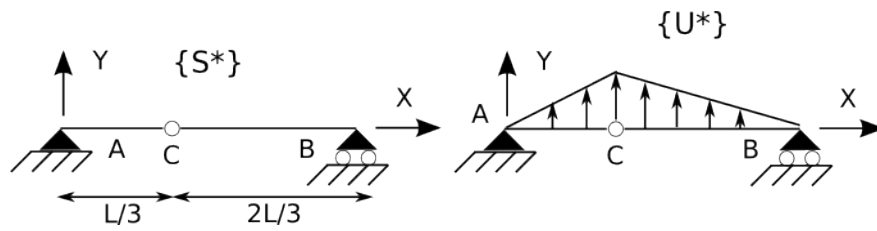


FIG. 8 – Structure virtuelle associée et champ de déplacements

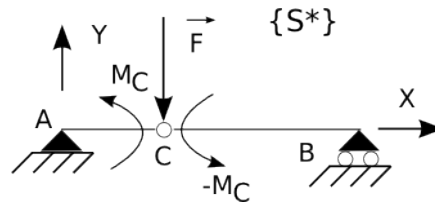


FIG. 9 – Structure virtuelle équivalente

schémas mécaniques, il vient :

$$-A_Y \frac{L}{3} + M_C = 0$$

$$M_C = \frac{2FL}{9}$$

Remarque : il est possible de faire une coupure selon une facette orientée par -x (c'est à dire conserver la partie à droite de la coupure). Les équilibres mécaniques sont alors indiqués sur la figure 7.

Le calcul des sollicitations conduit bien entendu au même résultat que l'on parte de l'équilibre de gauche ou de droite.

b) Application du TTV*

Choix d'un mécanisme associé {S*}

Le travail virtuel du moment en C est différent de 0 si on introduit une différence de rotation entre les barres AC et CB. Pour cela, on place une rotule en C (fig. 8).

Afin de rétablir l'équilibre, il faut rajouter le moment fléchissant libéré en C. Les systèmes {S} et {S*} sont alors équivalents d'un point de vue mécanique (fig. 9).

Les rotations virtuelles des barres 1 et 2 s'écrivent :

$$\omega_1 = \frac{v^* - 0}{\frac{L}{3}} = \frac{3v^*}{L}$$

$$\omega_2 = \frac{0 - v^*}{\frac{2L}{3}} = -\frac{3v^*}{2L}$$

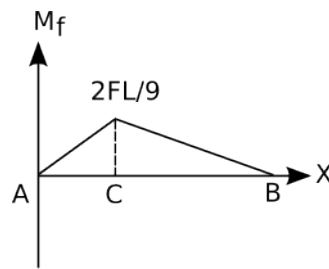


FIG. 10 – Diagramme du moment fléchissant

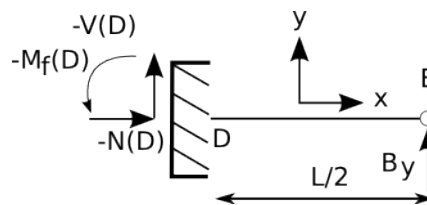


FIG. 11 – Calcul de l'effort tranchant

L'application du TTV* donne :

$$-Fv^* + \omega_1^* M_C + \omega_2^* (-M_C) = 0$$

$$-Fv^* + \frac{3v^*}{L} M_C + \left(-\frac{3v^*}{2L}\right) (-M_C) = 0$$

Soit $M_C = \frac{2FL}{9}$

Le diagramme du moment fléchissant dans {S} est alors entièrement déterminé (fig. 10).

Calculer l'effort tranchant en milieu de travée

Le point D est le milieu de la travée AB.

a) Application du principe fondamental de la statique

L'effort tranchant étant continu en D, il n'y a pas lieu de définir des efforts tranchants à gauche et à droite.

Projection suivant y (fig. 11) :

$$-V_D + B_y = 0 \Rightarrow V_D = \frac{F}{3}$$

b) Application du TTV*

Choix d'un mécanisme associé :

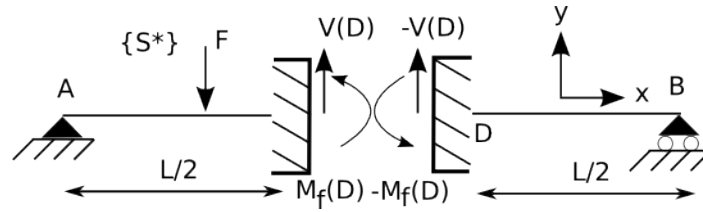


FIG. 12 – Détermination du mécanisme associé

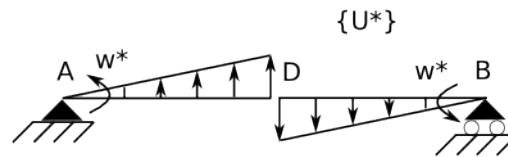


FIG. 13 – Champ de déplacements

Effectuons une coupure en $x = x_D$. Nous obtenons alors une structure à 3 degrés de liberté (fig. 12). En remarquant qu'il n'y a pas d'efforts horizontaux dans ce problème, le nombre de degrés de liberté peut être ramené à 2. Prenons par exemple comme degré de liberté les rotations de chaque barre (w_1^* et w_2^*). Il existe donc une infinité de champ de déplacements admissibles.

Remarquons que si la différence de rotation entre les deux barres est nulle alors le travail du moment fléchissant en D sera nul (ce qui nous arrange puisque la valeur de M_D n'est pas connue). La différence de rotation est nulle si $w_1^* - w_2^* = 0$, c'est à dire si les barres tournent de la même quantité w^* (fig. 13).

Calcul des travaux virtuels :

– Travail de \vec{F}

$$T^*(\vec{F}) = \omega^* \frac{L}{3} (-F)$$

– Travail du moment fléchissant

$$T^*(M_D) = \omega^* M_D + (-M_D) \omega^* = 0$$

– Travail de l'effort tranchant

$$T^*(V_D) = \omega^* \frac{L}{2} V_D + (-\omega^* \frac{L}{2}) (-V_D) \omega^* = V_D \omega^* L$$

En écrivant que la somme des travaux est nulle, il vient :

$$-\omega^* \frac{L}{3} F + V_D \omega^* L = 0$$

$$V_D = \frac{F}{3}$$