

# **APPLICATION DU THEOREME DES TRAVAUX VIRTUELS AU CALCUL DES STRUCTURES ISOSTATIQUES**

Philippe Lawrence

Octobre 2012

# Exercice 2

## Calcul du moment en B

On considère la structure {S} de la figure 1. La poutre dont la partie BC est en console est sollicitée par une charge uniformément répartie  $q$ .

Tracer l'allure du diagramme de moment fléchissant, en utilisant le théorème des travaux virtuels.

- Calculer la valeur du moment en B.
- Déterminer la réaction d'appui en B
- En déduire l'effort tranchant sur la poutre

## Corrigé

### Allure du moment fléchissant :

A et C sont des extrémités libres donc le moment est nul en ces points. De plus, puisque la charge répartie est uniforme le moment est parabolique entre A et B.

En B, en raison d'une réaction d'appui verticale, l'effort tranchant présente un point de discontinuité. La pente du moment fléchissant est donc discontinue en B. Le chargement de la console conduit à un moment négatif en B. En C, l'effort

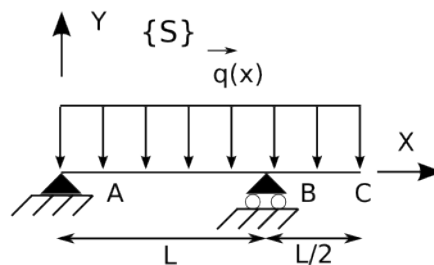


FIG. 1 – Structure isostatique

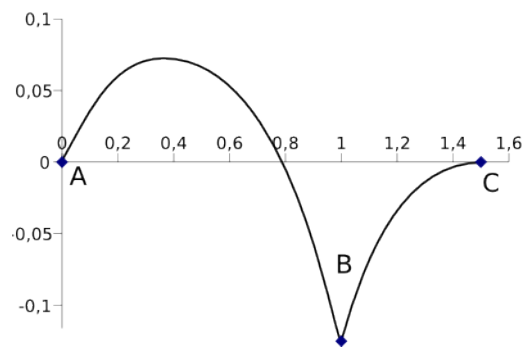


FIG. 2 – Allure du moment fléchissant

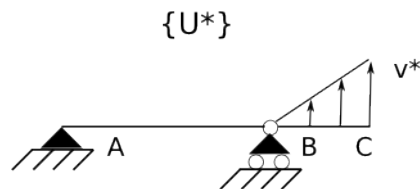


FIG. 3 – Champ de déplacement virtuel

tranchant est nul donc la pente du moment est nulle (figure 2).

Calcul du moment en B

Mécanisme associé :

Nous plaçons une rotule sur la barre en B (figure 3). Le paramètre scalaire du champ de déplacement choisi est le déplacement vertical de C ( $v_C$ ).

$$v^* = v_C^* = \vec{U}_C \cdot \vec{y}$$

$$\omega_1^* = 0$$

$$\omega_2^* = \frac{2v^*}{L}$$

Le système mécaniquement équivalent à {S} est illustré sur la figure 4.

Application du théorème des travaux virtuels

$$-q \frac{L}{2} \frac{v^*}{2} + \omega_2^* (-M_B) = 0$$

$$-q \frac{L}{2} \frac{v^*}{2} + \frac{2v^*}{L} (-M_B) = 0$$

$$M_B = -q \frac{L^2}{8}$$

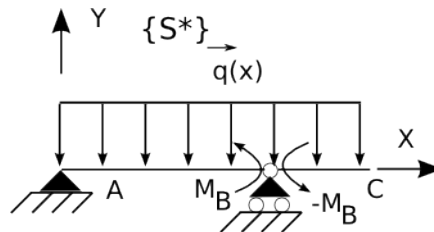


FIG. 4 – Système équivalent

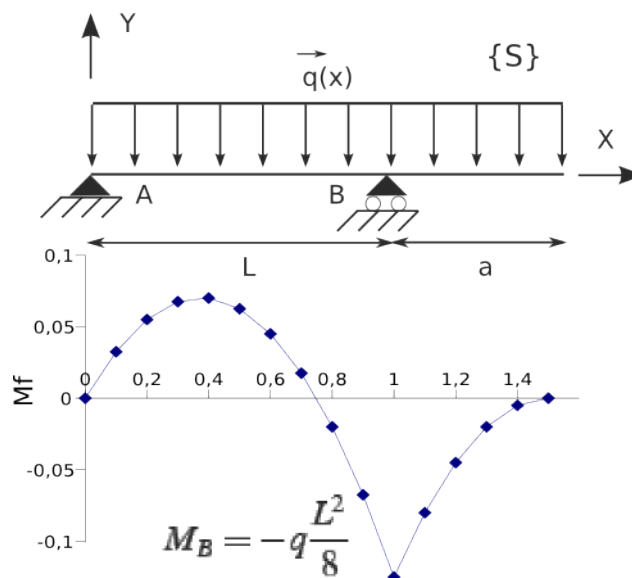


FIG. 5 – Moment fléchissant

Le diagramme des moments fléchissant est alors entièrement déterminé (fig. 5).

Remarque :

Pour calculer le moment en  $x = \frac{L}{2}$  ou le moment maximum dans la travée AB, il est possible d'utiliser le théorème de superposition.

### Calcul de la réaction d'appui en B

Le mécanisme associé au calcul de  $B_y$  est obtenu en supprimant l'appui en B. Le champ de déplacements virtuels est illustré sur la figure 6

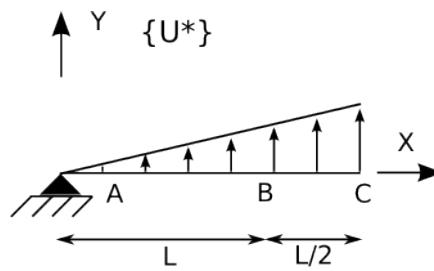


FIG. 6 – Champ de déplacement virtuel

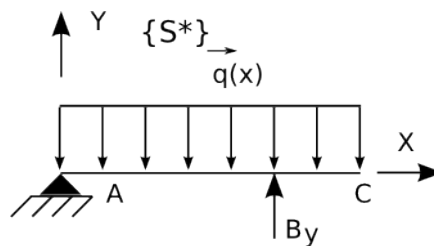


FIG. 7 – Structure équivalente

Le déplacement suivant y de B est :

$$v_B = \frac{2}{3}v_C^*$$

Système équivalent (fig. 7) : la résultante des charges uniformément réparties se situe à  $x = \frac{3L}{4}$ . Application du TTV\*

$$B_y \frac{2}{3}v^* + \left(-\frac{3}{2}qL\right) \frac{v^*}{2} = 0$$

$$B_y = \frac{9}{8}qL$$

$$A_y = \frac{3}{8}qL$$

Vérification à l'aide du principe fondamental de la statique.

Calculons la somme des moments en A :

$$M_A = B_y L - \frac{3}{2}qL\left(\frac{3}{4}L\right)$$

Nous trouvons bien :

$$M_A = 0$$

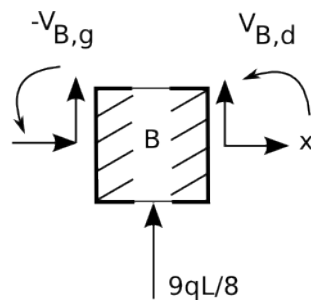


FIG. 8 – Equilibre du noeud B

### Effort tranchant

Il est aisé de calculer  $V_{B,d} = -\frac{qL}{2}$  (résultante des charges appliquées sur la partie en console).

La projection suivant y (axe vertical) des forces agissant sur le noeuds B (fig. 8) conduit à :

$$-V_{B,g} + \frac{9}{8}qL - \frac{qL}{2} = 0$$

$$V_{B,g} = \frac{5}{8}qL$$

L'effort tranchant est alors entièrement déterminé (fig. 9).

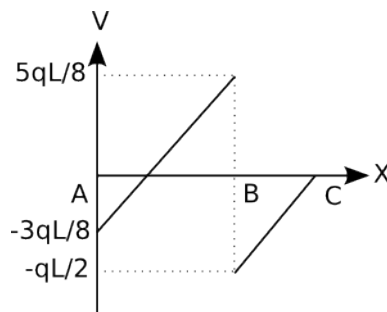


FIG. 9 – Diagramme de l'effort tranchant