

Cours
**METHODE DES
DEPLACEMENTS**

Philippe Lawrence

juin 2007

Table des matières

1	Méthode des déplacements	2
1.1	Déformation et degrés de liberté	2
1.2	Equations intrinsèques	3
1.3	Equilibre des noeuds	4
2	Exemple	5

Table des figures

1	Déformation de la barre $A_i A_j$	2
2	Déplacements des extrémités de la barre dans le repère local . . .	3
3	Efforts extérieurs appliqués aux extrémités d'une barre	3
4	Définition d'un noeud à la jonction de deux barres	4
5	Bilan des efforts appliqués par le noeud sur les extrémités des barres	5
6	Equilibre du noeud	5
7	Exemple	5
8	Définition des barres, noeuds et degrés de liberté	6
9	Equilibre des noeuds	7

1 Méthode des déplacements

1.1 Déformation et degrés de liberté

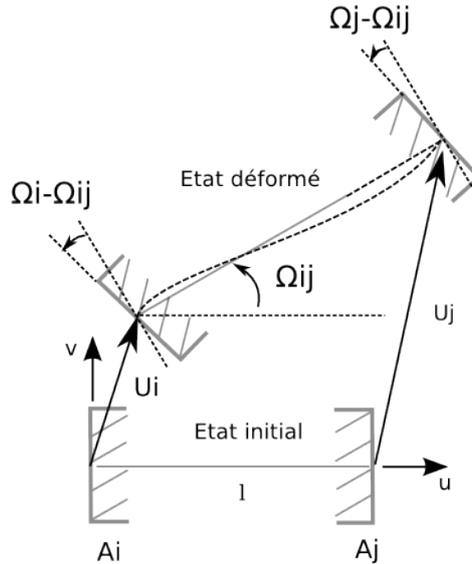


FIG. 1 – Déformation de la barre $A_i A_j$

Une barre $A_i A_j$ relie les noeuds A_i et A_j d'une structure de type poutre. Cette barre, sous l'effet du chargement de la structure subit des transformations, c'est à dire des déplacements et des rotations des noeuds. Pour chaque barre, ces transformations sont de deux types :

- Une transformation en solide : la barre subit une translation \vec{U}_i et une rotation Ω_{ij} . (3 inconnues).
- Une transformation en déformable : déplacement et rotation infiniment petits.

Les rotations des noeuds sont notées Ω_i et Ω_j .

Les rotations des sections sont $\Omega_i - \Omega_{ij}$ au point A_i et $\Omega_j - \Omega_{ij}$ au point A_j . Une translation de l'extrémité par rapport à l'origine $U_j - U_i$. (3 inconnues)

Le nombre total d'inconnues est donc égal à 6. Les inconnues portent le nom de degrés de liberté. La rotation en solide d'ensemble s'écrit en fonction des déplacements des noeuds. Les déplacements sont écrits dans le repère local de la barre (en configuration non déformée).

$$\tan \Omega_{ij} \simeq \Omega_{ij} = \frac{v_j - v_i}{l + u_j - u_i} \simeq \frac{v_j - v_i}{l}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{v_j - v_i}{l}$$

Les déformations ne peuvent être exprimées qu'en fonction des 3 groupements suivants :

$$u_j - u_i \quad \Omega_i - \frac{v_j - v_i}{l} \quad \Omega_j - \frac{v_j - v_i}{l}$$

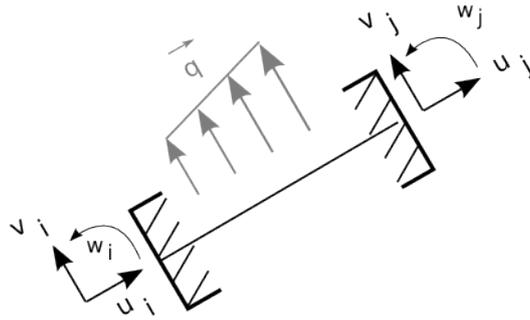


FIG. 2 – Déplacements des extrémités de la barre dans le repère local

1.2 Equations intrinsèques

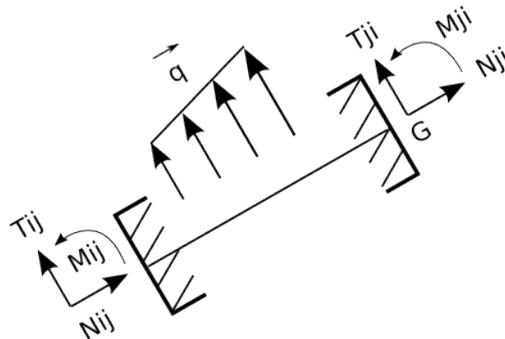


FIG. 3 – Efforts extérieurs appliqués aux extrémités d'une barre

Les efforts appliqués en A_i et A_j ne sont pas les sollicitations mais les efforts extérieurs appliqués par les noeuds sur la barre en projection dans le repère local de la barre.

Remarque : T_{ij} n'est pas un effort tranchant mais un effort tangent à la section droite.

Equations intrinsèques des barres :

Les équations intrinsèques pour les moments peuvent être démontrées à partir de la relation moment - courbure pour une barre sur deux appuis.

$$N_{ji} = EA \frac{u_j - u_i}{l} + N_{ji}^0$$

$$N_{ij} = -N_{ji} = -EA \frac{u_j - u_i}{l} + N_{ij}^0$$

$$M_{ji} = \frac{4EI}{l} \left[\Omega_j - \frac{v_j - v_i}{l} \right] + \frac{2EI}{l} \left[\Omega_i - \frac{v_j - v_i}{l} \right] + M_{ji}^0$$

$$M_{ij} = \frac{2EI}{l} \left[\Omega_j - \frac{v_j - v_i}{l} \right] + \frac{4EI}{l} \left[\Omega_i - \frac{v_j - v_i}{l} \right] + M_{ij}^0$$

$$T_{ji} = -\frac{M_{ij} + M_{ji}}{l} = -\frac{6EI}{l^2} \left[\Omega_j - \frac{v_j - v_i}{l} \right] - \frac{6EI}{l^2} \left[\Omega_i - \frac{v_j - v_i}{l} \right] + T_{ji}^0$$

$$T_{ij} = \frac{M_{ij} + M_{ji}}{l} = \frac{6EI}{l^2} \left[\Omega_j - \frac{v_j - v_i}{l} \right] + \frac{6EI}{l^2} \left[\Omega_i - \frac{v_j - v_i}{l} \right] + T_{ij}^0$$

Les termes N_{ji}^0 , N_{ij}^0 , T_{ji}^0 , T_{ij}^0 , M_{ji}^0 et M_{ij}^0 proviennent du chargement propre de la barre (charge répartie ou ponctuelle) et sont obtenus par le calcul d'une barre bi-encastree de même chargement.

Seules trois des six équations sont linéairement indépendantes puisque le système ne présente que 3 inconnues de déformation.

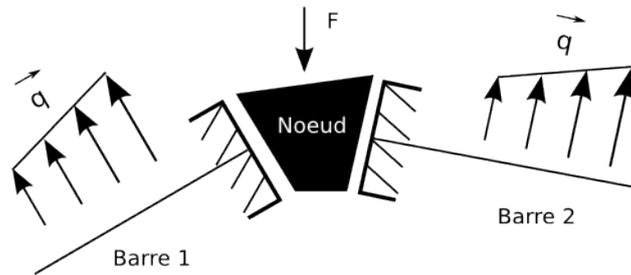


FIG. 4 – Définition d'un noeud à la jonction de deux barres

1.3 Equilibre des noeuds

Les barres sont reliées entre elles par l'intermédiaire de noeuds et sont supposées encastrees sur ces derniers. Si la barre est relaxée, il faut ré-écrire les équations intrinsèques de moments et condenser les inconnues de rotation.

Plutôt que d'étudier l'équilibre des barres, la méthode des déplacements consiste à étudier l'équilibre des noeuds de la structure. Chaque noeud étant en équilibre, le principe fondamental de la statique apporte alors trois équations scalaires par noeuds.

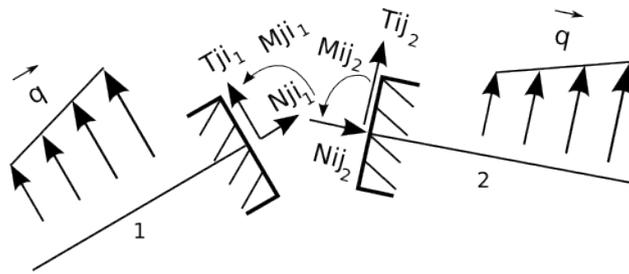


FIG. 5 – Bilan des efforts appliqués par le noeud sur les extrémités des barres

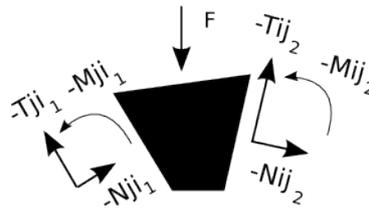


FIG. 6 – Equilibre du noeud

2 Exemple

Considérons la structure la plus simple qui soit : une barre sur deux appuis soumise à une charge ponctuelle appliquée en son milieu. La première étape consiste à décomposer la structure en noeuds et barres. La décomposition n'est pas unique mais il faut toujours rechercher la décomposition minimale. Dans notre exemple, la décomposition minimale est obtenue avec deux barres (la décomposition en une seule barre est envisageable mais ne fait plus appel à la méthode des déplacements) et trois noeuds.

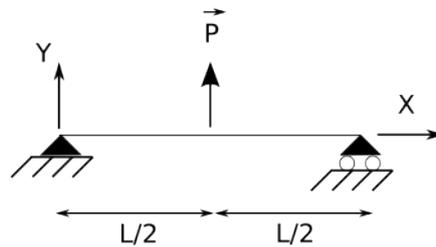


FIG. 7 – Exemple

Maintenant que nous avons identifié les inconnues (on compte 6 degrés de liberté) et les noeuds, nous pouvons écrire les équations d'équilibre.

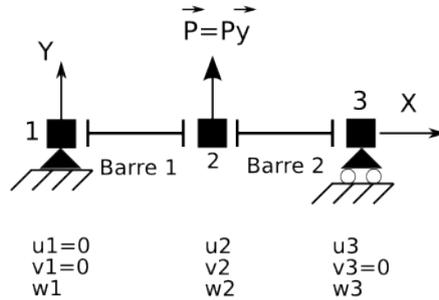


FIG. 8 – Définition des barres, noeuds et degrés de liberté

Equilibre en force du noeud 1 :

$$\begin{cases} X_1 - N_{12} = 0 & (1) \\ Y_1 - T_{12} = 0 & (2) \\ -M_{12} = 0 & (3) \end{cases}$$

Equilibre en force du noeud 2 :

$$\begin{cases} -N_{21} - N_{23} = 0 & (4) \\ -T_{21} - T_{23} + P = 0 & (5) \\ -M_{23} - M_{21} = 0 & (6) \end{cases}$$

Equilibre en force du noeud 3 :

$$\begin{cases} N_{32} = 0 & (7) \\ Y_3 - T_{32} = 0 & (8) \\ -M_{32} = 0 & (9) \end{cases}$$

On dispose donc de 9 équations. Les inconnues sont 6 degrés de liberté (ddl) et 3 inconnues de liaison (X_1, Y_1, Y_3). Parmi les 9 équations, on ne retiendra que celles conduisant aux ddl en éliminant celles contenant des inconnues de liaison. De plus, en observant que les déplacements horizontaux inconnus sont forcément nuls, il devient inutile d'écrire les équations (4) et (7).

$$\begin{pmatrix} -\frac{8EI}{l} & +\frac{24EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l^2} & 0 \\ -\frac{24EI}{l^2} & -\frac{192EI}{l^3} & 0 & -\frac{24EI}{l^2} \\ -\frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{16EI}{l} & -\frac{4EI}{l} \\ 0 & -\frac{24EI}{l^2} & -\frac{4EI}{l^2} & -\frac{8EI}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ v_2 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La résolution par inversion de la matrice conduit aux résultats connus qui suivent :

$$v_2 = \frac{Pl^3}{48EI}$$

Méthode des déplacements

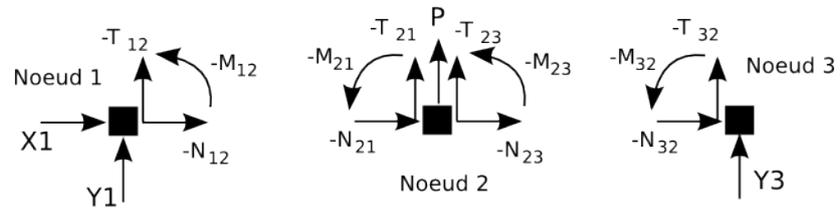


FIG. 9 – Equilibre des noeuds

$$\Omega_2 = 0$$
$$\Omega_1 = -\Omega_3 = \frac{Pl^2}{16EI}$$